第9講　ちょっと難あり極限

9

［A］　曲線 C：$y=e^x$ と直線 l：$y=ax+b$ $(a>0)$ が2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている．ただし，$x_2-x_1=c(>0)$ で $\mathrm{PQ}=1$ であるとき，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}$$

を求めよ．

［B］　$P_m=\dfrac{(3m)!}{3^{3m}(m!)^3}$ に対して $\lim\limits_{m\to\infty}P_m$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　ちょっと難あり極限

9　${}_n\mathrm{C}_k$ を二項係数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}$ を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　ちょっと難あり極限

9

［A］　曲線 C：$y=e^x$ と直線 l：$y=ax+b$ $(a>0)$ が２点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている．ただし，$x_2-x_1=c(>0)$ で $\mathrm{PQ}=1$ であるとき，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}$$

を求めよ．

［B］　$P_m=\dfrac{(3m)!}{3^{3m}(m!)^3}$ に対して $\displaystyle\lim_{m\to\infty}P_m$ を求めよ．

【答】［A］　2

［B］　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}P_m=0$

【解説】

［A］　２点 P，Q はいずれも C 上かつ l 上の点であるので

$$\begin{cases} y_1=e^{x_1} & \cdots\cdots① \\ y_2=e^{x_2} & \cdots\cdots② \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=ax_1+b & \cdots\cdots③ \\ y_2=ax_2+b & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

②÷①より

$$\frac{y_2}{y_1}=e^{x_2-x_1}=e^c \qquad \therefore\quad y_2=e^c y_1$$

④－③より

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1)=ac$$

よって

$$e^c y_1-y_1=ac \qquad \therefore\quad y_1=\frac{ac}{e^c-1}$$

ゆえに

$$y_2=\frac{ace^c}{e^c-1}$$

また

$$\mathrm{PQ}=1 \iff \sqrt{1+a^2}\,c=1 \quad \cdots\cdots⑤$$

このとき

$$\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}=\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{ac(e^c+1)}{e^c-1}\cdot ac$$

ここで⑤より

$$a\to\infty \text{ のとき } c\to 0$$

であり，このとき

$$\frac{c}{e^c-1}\to 1\ \ (c\to 0)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$(1+a^2)c^2=1$ より

$$ac=\sqrt{1-c^2}\to 1\ (c\to 0)$$

であるから

$$\frac{{y_2}^2-{y_1}^2}{a}=ac\cdot\frac{c}{e^c-1}\cdot(e^c+1)\to \mathbf{2}\ (a\to\infty)$$

［B］ 2 以上の自然数 m に対し

$$\frac{P_m}{P_{m-1}}=\frac{\dfrac{(3m)!}{3^{3m}(m!)^3}}{\dfrac{\{3(m-1)\}!}{3^{3(m-1)}\{(m-1)!\}^3}}$$

$$=\frac{(3m-1)(3m-2)}{9m^2}$$

となるが，

$$\frac{(3m-1)(3m-2)}{9m^2}-\frac{m}{m+1}$$

$$=\frac{1}{9m^2(m+1)}\{(m+1)(3m-1)(3m-2)-9m^3\}$$

$$=\frac{-7m+2}{9m^2(m+1)}<0\quad (m>1\text{ より})$$

よって

$$\frac{P_m}{P_{m-1}}<\frac{m}{m+1}\qquad\therefore\quad P_m<\frac{m}{m+1}P_{m-1}$$

これより

$$0<P_m<\frac{m}{m+1}P_{m-1}<\frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}P_1$$

$$=\frac{4}{9(m+1)}\to 0\ (m\to\infty)$$

ゆえに

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{P_m=0}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　ちょっと難あり極限

9　${}_n\mathrm{C}_k$ を二項係数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}$ を求めよ．

【答】 0

【解説】

$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}=a_n$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{{}_{2(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}}$$

$$=\frac{\dfrac{(2n+2)!}{5^{n+1}\{(n+1)!\}^2}}{\dfrac{(2n)!}{5^n(n!)^2}}$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{2}{5(n+1)}$$

となるので，自然数 n に対して $\dfrac{3}{5}\leqq\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5(n+1)}<\dfrac{4}{5}$ なので $a_{n+1}<\dfrac{4}{5}a_n$ が成り立つ．

よって $a_n<\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}a_1$ となるが，$a_n>0$ より $0<a_n<\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}a_1$ となる．

ここで $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}a_1\to 0$ $(n\to\infty)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{5^n}=\mathbf{0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。